Euclid VI.4 og VI.5

Ensvinklede trekanter

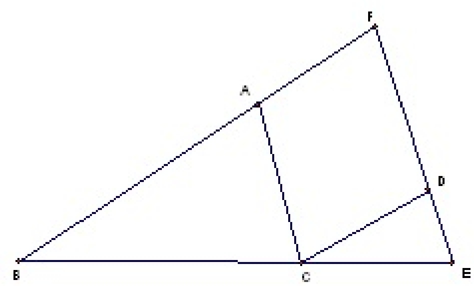
Jacob Nielsen[1]

Nedenfor følger en kommenteret og moderniseret gengivelse af Euclids beviser for sætningen om sidernes proportionalitet i ensvinklede trekanter.

Euclid VI.4

I ensvinklede trekanter er ensliggende sider proportionale. Ensliggende er de sider, der ligger over for lige store vinkler.

Betragt figuren nedenfor. ΔABC og ΔDCE er ensvinklede, idet $\angle ABC = \angle DCE$, $\angle BAC = \angle CDE$ og $\angle ACB = \angle CED$. Trekanterne er placeret, så CE ligger i forlængelse af BC. BA forlænges ud over A, og ED forlænges ud over D. Herved opstår skæringspunktet F. Da trekanterne er ensvinklede, følger det nu af **Euclids 5. axiom**, at ACDF er et parallelogram.



Ideen er nu at bruge **Euclid VI.2** både "set fra $\angle B$" og "set fra $\angle E$". Så følger det af "sammenligningskriteriet" V.16, at siderne er proportionale. Beviset går som følger:

Da linjerne AC og EF er parallelle gælder ifølge **Euclid VI.2:**

$$\frac{BA}{AF} = \frac{BC}{CE} \quad \wedge \quad AF = CD \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BA}{CD} = \frac{BC}{CE} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BA}{BC} = \frac{CD}{CE}$$

Og da linjerne CD og BF er parallelle, gælder ligeledes ifølge **Euclid VI.2:**

$$\frac{BC}{CE} = \frac{FD}{DE} \quad \wedge \quad FD = AC \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BC}{CE} = \frac{AC}{DE} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BC}{AC} = \frac{CE}{DE}$$

[1] Datadrev\Matematik\Geometri\Euclid VI4 020909.

Hvis de to resulterende ligninger på forgående side ganges sammen fås:

$$\frac{BA}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{CE} \cdot \frac{CE}{DE} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BA}{AC} = \frac{CD}{DE}$$

Hermed er en af proportionaliteterne vist, og de øvrige vises på analog måde.

Q.E.D

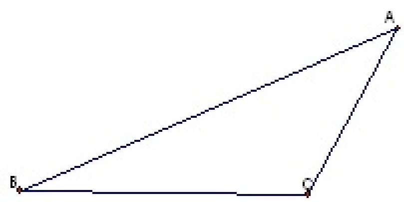
Det skal bemærkes, at der meget “ugræsk” er benyttet algebra i beviset. Euclids bevis er rent geometrisk. Det er prisen for en forenkling af beviset. I refferencen i fodnote nr. 2, kan en mere Euclid-tro udgave af beviset ses[2].

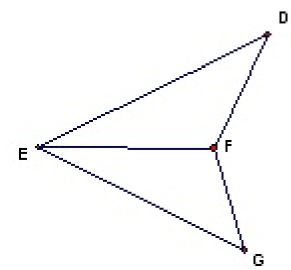
Euclid VI.5

Hvis siderne i to trekanter er proportionale, så er trekanterne ensvinklede.

Betragt figuren nedenfor. I ΔABC og ΔDEF er siderne proportionale:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{ED}{EF} \quad \wedge \quad \frac{BC}{CA} = \frac{EF}{FD}$$





Vi skal vise, at ΔABC og ΔDEF er ensvinklede. Til det formål konstrueres ΔEGF, så den er ensvinklet med ΔABC - det vil sige så $\angle$FEG = $\angle$ABC og $\angle$EFG = $\angle$ACB. Det er nu tilstrækkeligt at vise, at ΔFEG og ΔDEF er ensvinklede. **Euclid VI**.4 anvendt på de to ensvinklede trekanter ΔABC og ΔEGF giver:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{GE}{EF}$$

Kombination af de to ligninger ovenfor giver:

$$\frac{GE}{EF} = \frac{ED}{EF} \quad \Rightarrow \quad GE = ED$$

På samme måde kan man vise, at DF = GF. Da trekanterne endvidere har siden EF fælles, så har de alle tre sider fælles, og så er de kongruente ifølge **Euclid I.4** og **Euclid I.8**. Men så er trekanterne specielt ensvinklede.

Q.E.D

[2] “Great Books of the Western World 11, Euclid, Archimedes, Apollonius of Perga og Nicomachus”, Robert M. Hutchins editor, William Benton 1952.